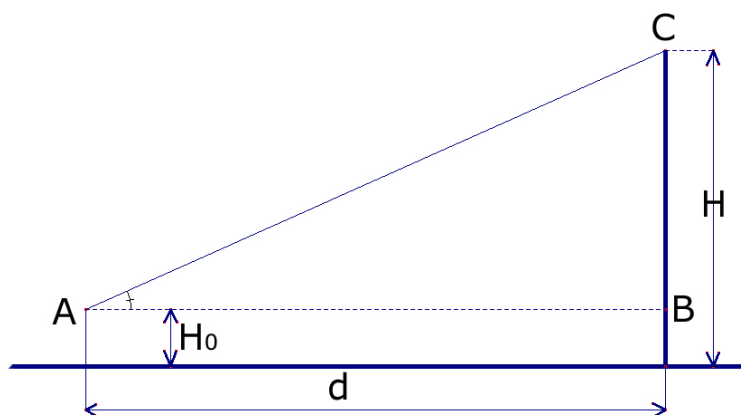


Deel 1 (benaderbaar object)

Om de hoogte van een bepaald object te berekenen hebben we geleerd dat je dat kunt doen als je in staat bent om een rechthoekige driehoek te bedenken waarvan je één zijde kunt meten, tezamen met een (niet rechte) hoek.

Zie onderstaand plaatje:



Om hoogte H te berekenen kun je gebruik maken van de formule voor de tangens.

Opdracht 1.1

Wat betekenen de letters d , H en H_0 ?

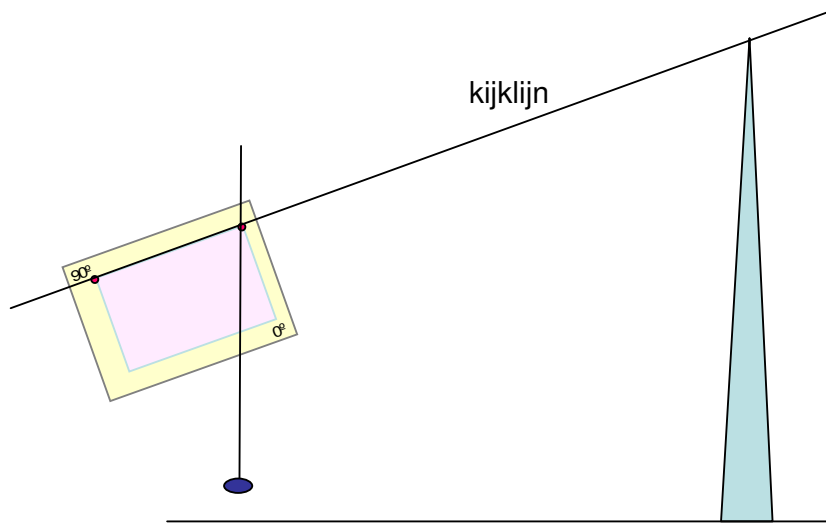
Leg uit wat je moet weten om hoogte H te kunnen berekenen.

Waarom gebruik je de tangens?

Opdracht 1.2

Geef de formule waarmee je hoogte H uit kunt rekenen.

Je gaat nu de hoogte van een object berekenen. Daarvoor moet je wat metingen doen, dat doe je met een extra stukje gereedschap.
Bekijk onderstaande tekening.



Je maakt nu zo'n meetinstrument (clinometer).

Daarvoor krijg je:

- 1 afdruk van een gradenboog (zonder getallen)
- Een stukje karton (A4)
- 2 spijkertjes
- Een stukje touw
- Een gewichtje

Kijk goed naar het plaatje en zet het meetinstrument in elkaar.

Zet ook de getallen bij de gradenboog. (Waar moet de 0° , en waar de 90° ?)

Opdracht 1.3

Je gaat nu de hoogte van het havo/vwo gebouw berekenen.

Deel a:

Kies een geschikte plek waar je rustig de hoogte van het gebouw kunt meten.

Noteer alle gegevens in een tabel.

Voer meerdere metingen per persoon uit.

Werkwijze:

- Zoek een plaats op x meters van het gebouw af (bepaal zelf wat handig is) => schrijf die afstand ook op!
- Nr 1 kijkt langs de spijkertjes (richt de clinometer)
- Nr 2 leest de waarden af
- Nr 3 Noteert de gevonden waarden
- Rouleren (Totdat iedereen een paar metingen heeft gedaan, bijvoorbeeld 3)

(Vergeet ook niet de ooghoogte –per persoon- te meten en op te schrijven!)

Deel b:

Schat de hoogte van het gebouw. Wat gebruik je als referentie?

Deel c:

Bereken nu met de in opdracht 1.2 gevonden formule de hoogte van het gebouw.

Wat doe je met de verschillen in berekening (meetverschillen)?

Kun je iets zeggen over de betrouwbaarheid van de metingen/berekeningen?

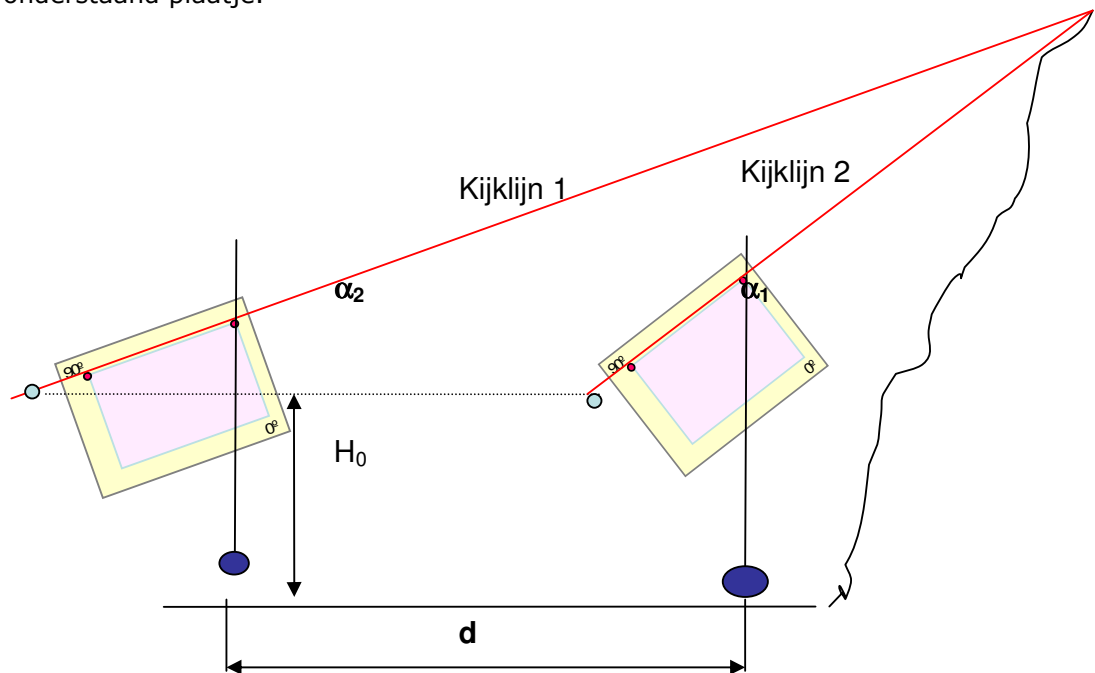
Practicum hoogtemeting deel 2 (onbenaderbaar object)

In deel 1 zijn er al metingen en berekeningen verricht aan een object waarbij je de afstand van de plaats waar je meet tot aan het object kunt meten.

Nu gaan we een object meten waar je niet bij kunt komen.

Dat doen we door op twee plaatsen te meten.

Zie onderstaand plaatje.



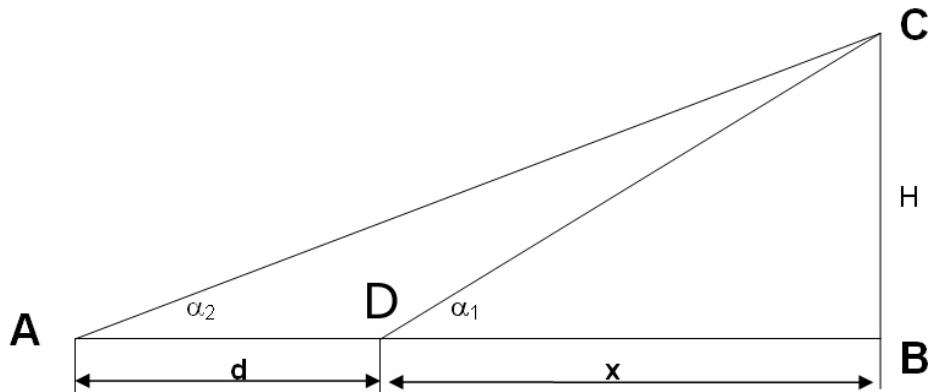
We meten dus vanuit twee posities hoek α . Tevens meten we de afstand d tussen beide meetpunten.

H_0 staat voor de hoogte van waaruit je de meting doet. (ongeveer ooghoogte)

Opdracht 2.1

De afstand (d) staat hier niet goed in het plaatje, kun je aangeven wat er niet correct is?

De berekening maken we met behulp van onderstaande vereenvoudigde tekening. De hoogte H_0 is achterwegen gelaten, want die wordt bij de einduitkomst opgeteld. (Vergeet dat dus niet!)



Hoek α_1 en α_2 en lengte d gaan we meten.

Er geldt:

$$\text{I: } \tan \alpha_2 = \frac{H}{(d+x)} \quad \text{en} \quad \text{II: } \tan \alpha_1 = \frac{H}{x}$$

Opdracht 2.2

Laat dat zien!

In deze twee vergelijkingen staan 2 onbekenden (H en $x \Rightarrow$ de hoeken en d kunnen we immers meten)

Hoe gaan we deze formules nu gebruiken?

Eerst een rekenvoorbeeld:

Neem aan dat $\alpha_2 = 45^\circ, \alpha_1 = 60^\circ, d = 5 \text{ meter}$

- Invullen in I: $\tan 45^\circ = \frac{H}{(5+x)}$, en in II: $\tan 60^\circ = \frac{H}{x}$
- Je kunt nu de waarde H "vrijmaken":
 - I: $H = (5+x) \cdot \tan 45^\circ$
 - II: $H = x \cdot \tan 60^\circ$

Nu kunnen we de waarde van x uitrekenen:

- $H(\triangle ABC) = H(\triangle DBC)$, dus: $(5+x)\tan 45^\circ = x \tan 60^\circ$
- $5 \tan 45^\circ + x \tan 45^\circ = x \tan 60^\circ$ (haakjes wegwerken)
- $x \tan 45^\circ - x \tan 60^\circ = -5 \tan 45^\circ$ (alles met x naar links en zonder x naar rechts)
- $x(\tan 45^\circ - \tan 60^\circ) = -5 \tan 45^\circ$ (x buiten haakjes halen)
- $x(1 - 1,732051) = -5$ (omdat $\tan 45^\circ = 1$ en $\tan 60^\circ = 1,732051$)
- $-0,732051x = -5$ (haakjes wegwerken)
- $x = 6,830125224$ (links en rechts delen door $-0,732051$)

Door x nu in te vullen één van de twee oorspronkelijke formules kun je H berekenen.

- De uitkomst is 11,83 meter.

Opdracht 2.3

Laat zien dat de uitkomst uit het voorbeeld 11,83 meter is, door de waarde van x in te vullen in I en in II

Een beter bruikbare formule ontstaat als we beide formules zo combineren dat de volgende formule ontstaat:

$$H = \frac{d * \tan \alpha_1 * \tan \alpha_2}{\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2}$$

Door het combineren van beide formules (I en II) is de waarde voor x verdwenen. Ook in deze formule gebruiken we H_0 (ooghoogte) nog even niet. De totale hoogte bestaat uit de berekende hoogte plus H_0 .

Opdracht 2.4

Laat nu zien dat de algemene formule klopt.

(Tip: vervang x in I door de betekenis van x in II en werk vervolgens de vergelijking eerst zo uit dat er geen breuken meer instaan. En dan verder.....)

Opdracht 2.5

Zou het belangrijk zijn om de twee plaatsen (punt A en punt D) en het object precies op één lijn te hebben als je deze meting gaat uitvoeren?

(Tip: maak een schets van het bovenaanzicht van de situatie en beredeneer je antwoord)

Opdracht 2.6

Voer de noodzakelijke metingen uit om de hoogte van een hoogspanningsmast te kunnen berekenen. Dat kun je het beste doen vanaf het parkeerplaatsje bij het brugklasgebouw.

Vergeet ook H_0 niet.

Schat eerst de hoogte van de mast.

Waarop baseer je die schatting? (Heb je bijvoorbeeld vergelijkingsmateriaal?)

Uitwerkingen:

Opdracht 1.1:

d = afstand tot het object, H is de hoogte van het object en H_o is de ooghoogte

Om de hoogte te berekenen heb je d , de hoek en H_o nodig.

Kijk in $\triangle ABC$: Tangens van de gemeten hoek = overstaande rechthoekszijde delen door de aanliggende rechthoekszijde.

Opdracht 1.2:

$$\tan \alpha = \frac{H - H_o}{d} \quad \text{Daaruit volgt: } H = H_o + d * \tan \alpha$$

Opdracht 1.3

Deel a:

Geschikte plek kiezen, zodanig dat de meting comfortabel uitgevoerd kan worden.

Te denken valt aan een afstand zo tussen de 5 en 15 meter.

Vergeet ook niet de ooghoogte –per persoon- te meten en op te schrijven!

Deel b:

De hoogte van het gebouw is op meerdere manieren te schatten, bijvoorbeeld;

- het aantal verdiepingen vermenigvuldigen met de hoogte per verdieping (hoe bepaal je die?)
- Zet een persoon tegen de gevel en schat vervolgens de hoogte, uitgaande van de lengte van die persoon.
- Etc.

Deel c:

Berekening: Geen idee, heb het zelf nog niet gemeten.

Hoe nauwkeurig is het resultaat:

- Hoe om te gaan met (meet-) verschillen?
- Hoe betrouwbaar is deze meting?
- Eventueel een bandbreedte laten bepalen.
- Is de gemeten hoek nog van invloed op het resultaat?
- Is de afstand van belang voor de nauwkeurigheid?

Opdracht 2.1: De ooghoogte is hier weergegeven in het scharnier, in werkelijkheid is dat de plaats waar het oog zich bevindt. Dat is vooral te zien bij de rechter meting, het echte oog zakt hier wat naar beneden ten opzichte van de meting van α_2 .

Opdracht 2.2: De tangens van een hoek is het quotiënt van de lengte van de overstaande rechthoekszijde en de aanliggende rechthoekszijde.

Opdracht 2.3: Substitueer 6,830125224 in II en rond af op hele centimeters.

Opdracht 2.4:

vergelijking I: $\tan \alpha_2 = \frac{H}{d+x}$ en vergelijking II: $\tan \alpha_1 = \frac{H}{x}$

Herschrijf II: $x = \frac{H}{\tan \alpha_1}$

Substitueer II in I: $\tan \alpha_2 = \frac{H}{d + \frac{H}{\tan \alpha_1}}$

Breng d in de onderste breuk: $\tan \alpha_2 = \frac{H}{\frac{d * \tan \alpha_1}{\tan \alpha_1} + \frac{H}{\tan \alpha_1}}$

Vereenvoudig: $\tan \alpha_2 = \frac{H}{\frac{d * \tan \alpha_1 + H}{\tan \alpha_1}}$

Vereenvoudigen van de breuk: $\tan \alpha_2 = \frac{H * \tan \alpha_1}{d * \tan \alpha_1 + H}$

Herschrijf: $\tan \alpha_2 * (d * \tan \alpha_1 + H) = H * \tan \alpha_1$

Haakjes wegwerken: $\tan \alpha_2 * d * \tan \alpha_1 + H * \tan \alpha_2 = H * \tan \alpha_1$

Breng de term met H van links naar rechts: $\tan \alpha_2 * d * \tan \alpha_1 = H * \tan \alpha_1 - H * \tan \alpha_2$

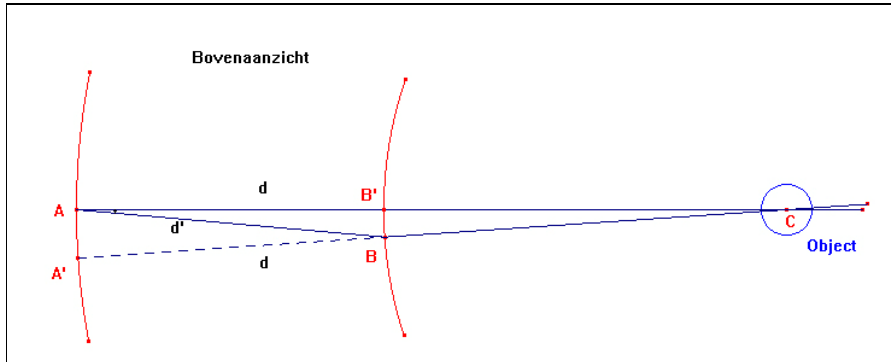
Haal H buiten haakjes: $\tan \alpha_2 * d * \tan \alpha_1 = H * (\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2)$

Herschrijf de vergelijking als volgt: $H = \frac{d * \tan \alpha_1 * \tan \alpha_2}{\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2}$

En klaar!

Opdracht 2.5: Het is in feite niet belangrijk, alleen kun je de afstand tussen de metingen dan erg moeilijk bepalen. Deze factor (d) staat voor de verplaatsing vanaf A naar D "in de richting van het object".

Zie de volgende situatieschets:



Als de hoek BAB' maar erg klein gehouden kan worden is de gemeten afstand AB maar een fractie groter dan de beoogde afstand AB' .

We hebben de afstand AB gemeten, wat is dan de invloed op AB' ?

Hiervoor kunnen we de cosinus gebruiken ($\cos = \text{aanliggende zijde} / \text{schuine zijde}$)

$$\cos BAB' = AB' / AB \rightarrow AB' = AB * \cos BAB'$$

Gevolgen van het niet meten op één lijn.							
basis d	10						
afwijking hoek (graden)	1	2	3	4	5	10	15
d wordt	9,998	9,994	9,986	9,976	9,962	9,848	9,659
Verschil	0,002	0,006	0,014	0,024	0,038	0,152	0,341
afwijking hoek (graden)	20	25	30	35	40	45	50
d wordt	9,397	9,063	8,66	8,192	7,66	7,071	6,428
verschil	0,603	0,937	1,34	1,808	2,34	2,929	3,572

Opdracht 2.6

Zelf nog niet uitgevoerd, wellicht extra instructie geven:

- Meerdere metingen per persoon per meetpunt (A en D) laten verrichten
- Gebruik alleen metingen van dezelfde persoon voor het combineren van metingen op punt A en punt D
- Hoe nauwkeurig is het resultaat:
 - Hoe om te gaan met (meet-) verschillen?
 - Hoe betrouwbaar is deze meting?
 - Eventueel een bandbreedte laten bepalen.
 - Is de gemeten hoek nog van invloed op het resultaat?
 - Is de afstand (of het verschil in gemeten hoeken) van belang voor de nauwkeurigheid?
- Etc.

